

# Les modèles fractals en finance

---

**Julien IDIER**

*Direction générale des Études et des Relations internationales*

*Service de Recherche en économie financière*

« Dire beaucoup avec peu de mots, c'est le principe de toute bonne science », *Benoît Mandelbrot*<sup>1</sup>

*La crise financière a mis en lumière les fragilités de certains modèles d'évaluation des actifs financiers, dominés par un ensemble d'hypothèses qui prennent imparfaitement en compte les dynamiques brutales associées à l'émergence de crises ou l'apparition d'événements extrêmes. De plus, la forte interdépendance entre actifs financiers, marchés, pays, via les phénomènes de contagion, est souvent exacerbée par les crises.*

*L'objet de ce court article est de présenter les applications en économie qui utilisent la méthodologie des fractales proposée dès les années soixante par Benoît Mandelbrot. Ces modèles améliorent par exemple l'estimation de la volatilité des prix d'actifs ou la modélisation des crises financières.*

Mots-clés : fractale, crise, contagion

Codes JEL : G01 C01

<sup>1</sup> Polytechnicien (promotion 1944) et docteur en mathématiques de l'Université de Paris (1954), Benoît Mandelbrot a enseigné et étudié notamment au Massachusetts Institute of Technology (MIT) et dans les universités américaines les plus réputées (Yale, Princeton et Harvard). Dernier étudiant postdoctoral du mathématicien Von Neumann, il a élaboré, dès les années soixante, la théorie mathématique des fractales. Il décède le 14 octobre 2010, laissant derrière lui un outil dont les applications ne cessent de se développer.

Le mathématicien Benoît Mandelbrot, connu pour la théorie des fractales, élaborée dès les années soixante, est décédé le 14 octobre 2010. Ce court article présente la pertinence économique de cette théorie pour la modélisation des marchés financiers, des événements extrêmes ou encore des phénomènes de contagion.

## I | La théorie fractale

### S'éloigner du consensus...

La crise financière a particulièrement souligné la fragilité des modèles mathématiques communément utilisés en ingénierie financière pour la détermination des prix des actifs et la gestion des risques de marché. Selon Benoît Mandelbrot, ces modèles sont potentiellement erronés dans la mesure où ils s'appuient en majorité, à la suite des travaux de Bachelier (1900), sur trois hypothèses qui définissent ce que Mandelbrot appelle le hasard « bénin » :

- « la loi des grands nombres » selon laquelle les fluctuations aléatoires se neutralisent et deviennent insignifiantes lorsque le nombre d'observations a suffisamment augmenté ;
- « le théorème central limite dit gaussien » : compte tenu d'un grand nombre d'observations, une variable aléatoire (tel un prix d'actif) peut être modélisée grâce à une courbe en cloche gaussienne ;
- enfin, l'axiome qui rend le présent indépendant d'un passé suffisamment éloigné.

Mandelbrot se place ainsi face à l'« *establishment* » de la théorie des probabilités représenté par exemple par Gnedenko et Kolmogorov (1954) pour qui « toute la valeur épistémologique de la théorie des probabilités est basée sur le fait que des phénomènes aléatoires, considérés dans leur action collective à grande échelle, créent une régularité non aléatoire »<sup>2</sup>.

Selon Mandelbrot, la théorie de la finance s'articule principalement autour de trois axes :

- le *Capital asset pricing model* (CAPM), qui trouve son origine dans les travaux de Bachelier, et son développement dans les années soixante grâce à William Sharpe ;
- la théorie moderne du portefeuille (MPT), développée par Harry Markowitz dans les années soixante ;
- et la formule d'évaluation des options de Black et Scholes développée dans les années soixante-dix.

Ces trois piliers des théories de la finance reposent en grande partie sur la notion de hasard « bénin ». Cette notion est insatisfaisante car elle écarte par construction les mouvements les plus pathologiques du champ de l'analyse. Cependant, ces mouvements « catastrophiques » sont *a posteriori* les plus intéressants, et caractérisent ce que Mandelbrot a baptisé le hasard « sauvage ».

### ... pour rendre compte des mouvements pathologiques des marchés

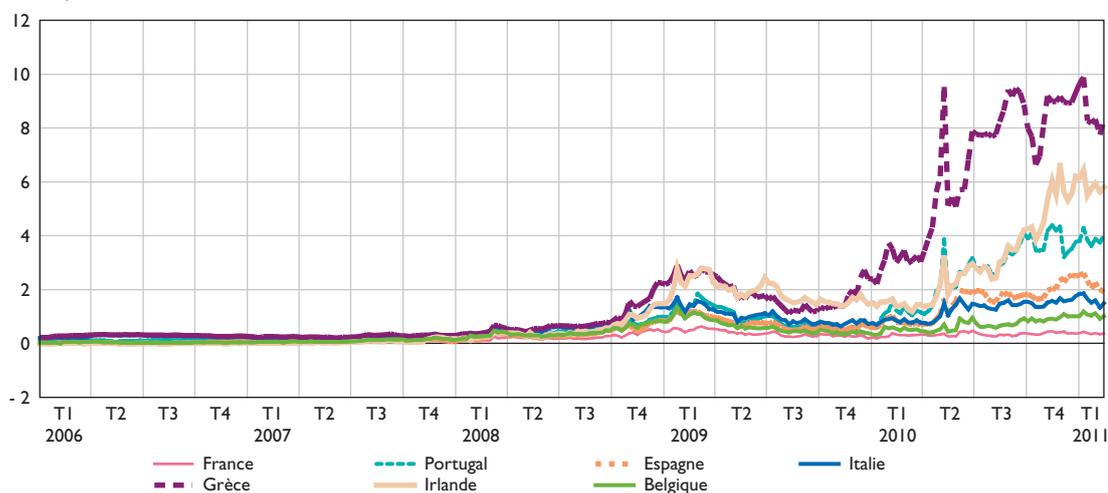
Dans un monde de hasard « bénin », les *spreads* de taux souverains constatés en zone euro en 2010 sont par exemple inconcevables compte tenu des observations passées (*spreads* oscillants généralement entre 0 et 30 points de base avant la crise, cf. graphique 1).

Un autre exemple caractéristique est la survenance de rendements extrêmes sur les marchés boursiers. En effet, l'observation des séries historiques de prix d'actifs ne permet pas de valider certaines hypothèses comme la normalité des rendements (courbe en cloche de Gauss). Sous cette hypothèse, un rendement quotidien du CAC 40 inférieur à 7 % devrait se produire environ une fois tous les 4 000 ans, alors qu'entre 1988 et aujourd'hui, des rendements quotidiens inférieurs à 7 % ont déjà été observés à six reprises (cf. graphique 2). L'approche gaussienne a cependant été étendue depuis Black et Scholes dans

2 Gnedenko et Kolmogorov (1954), Limit distributions for sums of independent random variables

Graphique 1 Spread de taux 10 ans en zone euro, vis-à-vis de l'Allemagne

(en points de %)

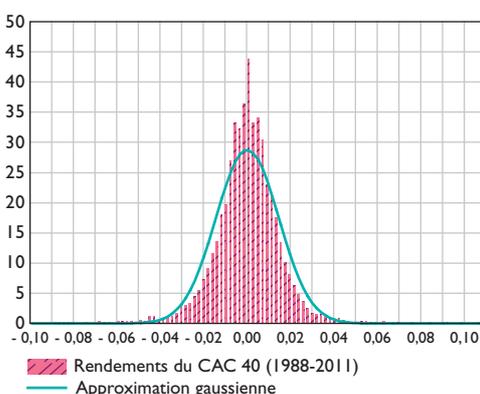


Source : Banque de France

les théories d'évaluation d'actifs (*asset pricing*) en considérant l'introduction de changements de régimes, de sauts, ou de volatilité stochastique. L'utilisation des fractales est une des réponses possibles vis-à-vis de l'insuffisance du « hasard bénin ».

Si l'utilisation des mathématiques fractales dans l'analyse des prix d'actifs a débuté dès les années soixante avec Mandelbrot, la résurgence de cette théorie dans les années quatre-vingt-dix a été motivée par la fréquence élevée des crises auxquelles les marchés financiers ont été confrontés. Qu'apportent donc les mathématiques fractales à l'étude des mouvements pathologiques des marchés ?

Graphique 2 Approximation gaussienne de la distribution des rendements du CAC 40



Source : Euronext ; calculs : Banque de France

## 2| L'utilisation des fractales en théorie de la finance

### Des propriétés d'échelle...

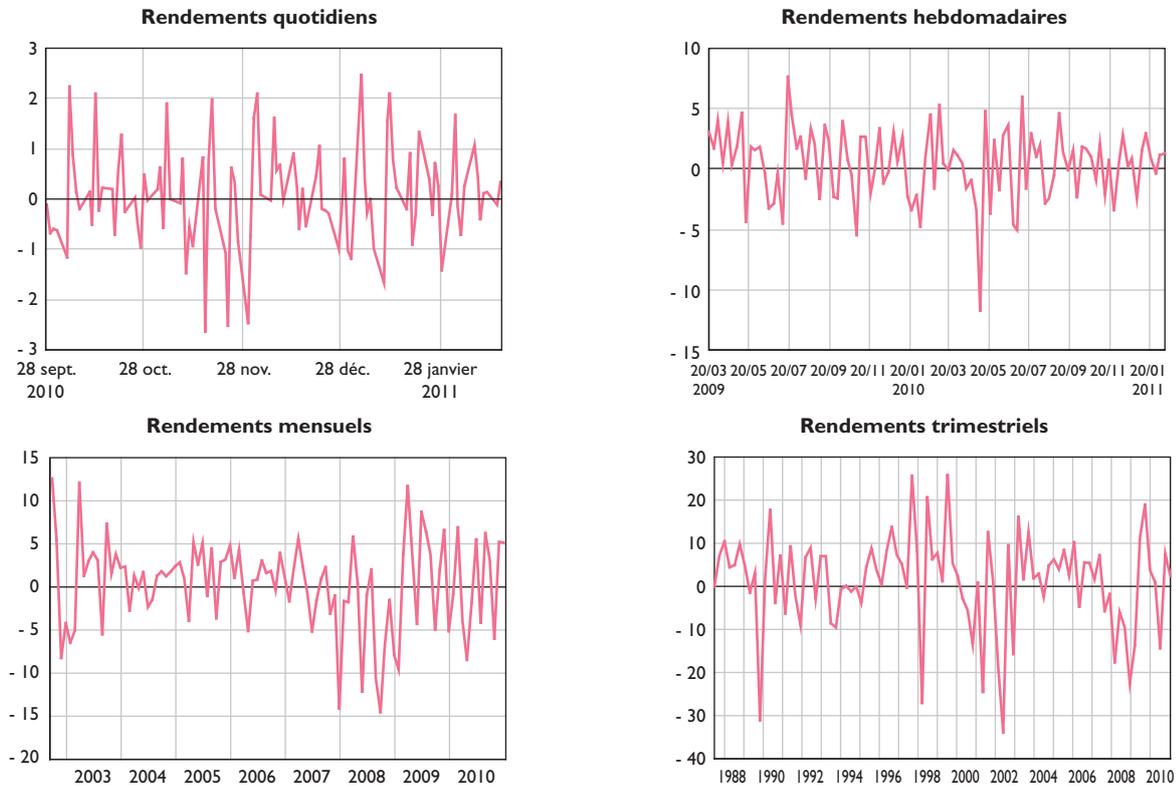
Le terme « fractale » est un néologisme créé par Benoît Mandelbrot en 1974 qui signifie brisé, irrégulier. Une fractale désigne des objets dont la structure est liée à l'échelle.

L'étude des événements extrêmes sur les marchés est difficile du fait de la faible fréquence d'observation de ces phénomènes. L'approche fractale permet une analyse de ceux-ci en exploitant la notion de « propriétés d'échelle ». On appelle propriétés d'échelle la récurrence de certains phénomènes, observés à des échelles différentes. L'application de cette notion aux rendements d'actifs financiers, montre qu'il existe des régularités statistiques dans les variations de prix mensuelles, hebdomadaires, quotidiennes, voire intra-quotidiennes (cf. graphiques 3). L'exploitation de cette régularité permet une modélisation parcimonieuse et une analyse des processus de prix transposable à toutes les fréquences d'observation. Par exemple un choc important à l'échelle d'une journée peut aider à la modélisation des chocs observés à des fréquences plus basses (tels que les crises financières).

Le caractère brutal et peu prévisible de ces chocs rend néanmoins une modélisation des distributions plus

**Graphiques 3 Rendements du CAC 40 à différentes échelles**

(en %)



Source : Euronext ; calculs : Banque de France

difficile à toutes les fréquences. Mandelbrot s'écarte ainsi du principe *natura non facit saltum*<sup>3</sup> utilisé en économie par Marshall et qui implique la continuité dans les processus économiques.

**... aux lois alpha-stables**

Pour rendre compte de la brutalité et de l'extrême variabilité de certains prix, Mandelbrot introduit une nouvelle famille de lois de distributions. Celles-ci ont la particularité d'attribuer aux événements extrêmes des probabilités plus élevées que sous l'hypothèse gaussienne. De plus, ces distributions peuvent être combinées entre elles à différentes échelles. Ainsi, dès 1967, pour modéliser les variations de prix du coton, il définit ce qu'il appelle des lois alpha-stables. Une loi alpha-stable permet de considérer à chaque échelle (ou fréquence d'observation) une certaine distribution dont le paramètre alpha représente l'épaisseur de la queue de distribution (probabilité d'événements rares). De plus cette loi est dite « stable » car une

combinaison linéaire de distributions alpha-stable est encore une distribution alpha-stable : ce qui permet d'exploiter simplement les propriétés d'échelles des variations de prix tout en rendant compte des événements extrêmes.

**3| L'échelle de temps en finance, un objet fractal**

**De l'analyse du très court terme au très long terme...**

L'échelle du temps sur un marché boursier peut être perçue comme fractale. Un agent économique, en période de crise par exemple, est soumis à une somme d'informations nombreuses et contradictoires (Calvet et Fisher, 2007). Il doit prendre en compte l'ensemble de ces éléments et faire des choix rapides, répétés et peut-être contradictoires. Dans un environnement plus serein, l'information pertinente arrive régulièrement,

3 « La nature ne crée pas de sauts », Principes d'économie politique, Alfred Marshall (1890)

la prise de décision des agents se fait moins dans la précipitation. On introduit alors une déformation de l'échelle de temps, avec alternances de périodes de plus ou moins fortes dilatations, qui ne répondent plus à une échelle de temps calendaire de type heure, jours, mois, mais à la régularité de phénomènes statistiques.

Ainsi, la modélisation fractale utilise cette déformation du temps et cherche à révéler des régularités permettant une modélisation des phénomènes grâce à la détection des fréquences d'analyse les plus pertinentes. L'approche fractale analyse ainsi de façon transversale le très court terme (par exemple la microstructure des marchés, le comportement des teneurs de marchés, ou les mécanismes d'échange) et le très long terme (par exemple les cycles longs de volatilité des marchés ou l'impact faiblement résilient des crises financières).

#### ... en passant par les crises et les phénomènes de contagion

L'exemple précédent peut être étendu à une population d'investisseurs ayant des horizons différents. Soit un investisseur à la journée, un à la semaine et un au mois. Leur stratégie est la même, vendre quand les prix chutent et acheter quand les prix augmentent. *Ex post*, une dilatation dans le temps des variations de prix permet de révéler une unique stratégie, mais à des échelles différentes. Dans cette illustration, la survenance d'une crise se matérialise simplement par une convergence des comportements. Une baisse répétée des rendements quotidiens, conduit à une baisse des rendements hebdomadaires, ce qui fait chuter les rendements mensuels, et finalement entraîne une convergence des comportements sur tous les horizons : la crise se matérialise.

Les phénomènes de contagion sont également envisageables dans ce contexte : les actifs échangés internationalement sont soumis à un ensemble

d'informations communes, qui *via* des moyens de communication rapides et performants, rendent les échelles de temps interdépendantes. Ainsi un ensemble partagé de fréquences, dans le temps dit « boursier », est à l'origine de phénomènes de propagation des crises sur des horizons communs.

## 4| La modélisation fractale des marchés financiers

L'approche fractale, en modélisation financière, est encore dans une phase exploratoire avec néanmoins de nettes avancées sur la décennie passée. Les apports de Mandelbrot sur des sujets tels que la modélisation de la volatilité des actifs (et donc de leur distribution) permettent d'appréhender sous un angle nouveau les phénomènes de crises et de contagion. En particulier, les travaux de Calvet, Fisher et Mandelbrot (1997) introduisant les modèles multifractals des rendements d'actifs (MMAR) ont un large champ d'application et ont été perfectionnés. Ces modèles permettent aujourd'hui d'évaluer les variations de volatilité de façon plus pertinentes que certains modèles standards pour lesquels la volatilité est un processus assez persistant ; ils permettent de quantifier efficacement certains indicateurs de risque tel le *value-at-risk* utilisé dans le contrôle des risques des portefeuilles de marché, ou les volumes échangés sur les marchés (Lux et Kaizoji, 2007) ; ils améliorent la compréhension des crises et des phénomènes de contagion (Idier, 2011), ou encore ils permettent de modéliser des courbes de taux (Calvet et Fisher, 2010) tout en s'inscrivant dans une approche fractale des marchés financiers. Ainsi Benoit Mandelbrot, par son approche originale du fonctionnement des marchés financiers, a jeté un éclairage nouveau sur nombre de méthodologies et phénomènes économiques.

*L'approche fractale des marchés financiers, sans prétendre être une réponse à toute contrainte de modélisation financière, constitue une alternative permettant la prise en compte des événements extrêmes. L'intuition économique qui lui est sous-jacente est pertinente et la formalisation mathématique à laquelle elle recourt performante pour rendre compte des phénomènes de crise ou de contagion. La crise actuelle justifie de développer cette théorie dont l'ambition majeure, motivante, est d'étudier ce qui fait à la fois la règle et l'exception.*

## Bibliographie

**Black (F.) et Scholes (M.) (1973)**

"The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, vol. 81, n° 3, p. 637-654

**Calvet (L.), Fisher (A.) et Mandelbrot (B.) (1997)**

"The multifractal model of asset returns", *Cowles Foundation Discussion Papers*

**Calvet (L.) et Fisher (A.) (2007)**

"Multifrequency news and stock returns", *Journal of Financial Economics*, vol. 86, p. 178-212

**Calvet (L.) et Fisher (A.) (2008)**

"Multifractal volatility : theory, forecasting, and pricing", Elsevier – Academic Press

**Calvet (L.), Fisher (A.) et Wu (L.) (2010)**

"Dimension-invariant dynamic term structures", HEC Paris, mimeo

**Gnedenko (B.V.) et Kolmogorov (A.N.) (1954)**

"Limit distributions for sums of independent random variables", Addison-Wesley, première édition

**Idier (J.) (2011)**

"Long-term vs. short-term comovements in stock markets : the use of Markov-switching multifractal models", *The European Journal of finance*, vol. 17, n° 1, p. 27-48

**Lux (T.) et Kaizoji (T.) (2007)**

"Forecasting volatility and volume in the Tokyo stock exchange : long memory, fractality and regime switching", *Journal of Economic Dynamic and Control*, vol. 31, n° 6, p. 1808-1843

**Mandelbrot (B.) (1963)**

"The variation of certain speculative prices", *Journal of Business*, vol. 36, p. 394-419

**Mandelbrot (B.) (1967)**

"The variation of the prices of cotton, wheat and railroad stocks, and some financial rate", *The Journal of Business*, vol. 40, p. 393-413

**Mandelbrot (B.) (2005)**

*Une approche fractale des marchés*, éditions Odile Jacob

**Markowitz (H. M.) (1952)**

"Portfolio selection", *The Journal of Finance*, vol. 7, n° 1, p. 77-91

**Sharpe (W. F.) (1964)**

"Capital asset prices – a theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of Finance*, vol. 19, n° 3, p. 425-442